

Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis 2021 - 2022



Αντώνης Βαλέργας
Στέλιος Μιχαήλογλου
Δημήτρης Πατσιμάς
Νίκος Σαμπάνης

Αποστόλης Κακαβάς
Άγγελος Μπλιάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Βαγγέλης Τόλης

Νίκος Τούντας

1ο Διαγώνισμα

2-3-2022

Θέμα Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη

στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq A$ με $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, τότε θα είναι γνησίως φθίνουσα και στο σύνολο $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

β) Έστω συνάρτηση f ορισμένο σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ εξαρτάται από τα άκρα a, β των διαστημάτων.

γ) Για μια οποιαδήποτε συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ $x_0 \in A_f$.

μονάδες 6

A5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις.

A. Αν $f(x) = e^{\beta x}$, $g(x) = e^{\alpha x}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με

α) $\frac{\alpha-1}{\alpha}$

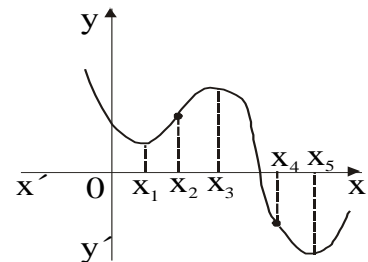
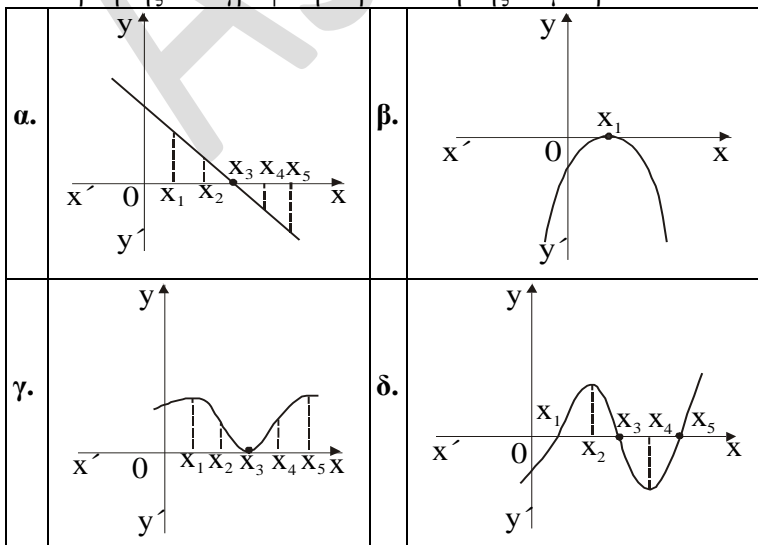
β) $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$

γ) $\frac{\alpha+1}{\alpha^2}$

δ) $\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$

ε) $\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$

B. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f . Η γραφική παράσταση της f' μπορεί να είναι



ε. καμία από αυτές

μονάδες 4

Θέμα Β

$$\Deltaίνεται\ η\ συνάρτηση\ f(x) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{αν}\ x \in (-\infty, -1] \\ \frac{x+1}{\alpha+1} & ,\ \text{αν}\ x \in (-1, \alpha] \\ 1 & ,\ \text{αν}\ x \in (\alpha, 1] \\ \frac{\beta-x}{\beta-1} & ,\ \text{αν}\ x \in (1, \beta) \\ 0 & ,\ \text{αν}\ x \in [\beta, +\infty) \end{cases} .$$

B1. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο \mathbb{R} για οποιαδήποτε $\alpha \in (-1, 1)$ και $\beta \in (1, +\infty)$.

μονάδες 5

B2. Να γίνει η γραφική της παράσταση για τυχαίο $\alpha \in (-1, 1)$ και τυχαίο $\beta \in (1, +\infty)$ και μέσω του σχήματος να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 5

B3. Να βρείτε, την πρώτη παράγωγο $f'(x)$ της f , όπου αυτή ορίζεται.

μονάδες 5

B4. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = \frac{1}{2}$ στα σημεία

$$M\left(-\frac{1}{2}, \gamma\right) \text{ και } N\left(\frac{3}{2}, \gamma\right), \text{ να βρείτε τα } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

μονάδες 4

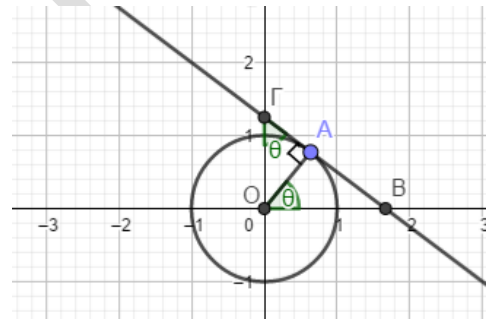
B5. Για $\alpha = 0$ και $\beta = 2$ να λυθεί στο \mathbb{R} η εξίσωση $f(x) = e^x$.

μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος (κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 1 και σημείο του A ώστε $\angle AOB = \theta$ με $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Αν η εφαπτομένη του τριγωνομετρικού κύκλου τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα B και Γ αντίστοιχα, τότε:



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $O\Gamma B$ τριγώνου είναι

$$E(\theta) = \frac{1}{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\eta\theta} \quad \text{Μονάδες 7}$$

Γ2. Να βρείτε τη τιμή της γωνίας θ ώστε το εμβαδόν να γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 6

Γ3. Δείξτε ότι υπάρχει γωνία θ τέτοια ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι μεγαλύτερο από 2022 τ.μ.

Μονάδες 6

Εστω επιπλέον ότι το A κινείται πάνω στον κύκλο, ώστε $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $\theta'(t) = 2 \text{ rad/sec}$.

Γ4. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου τη χρονική στιγμή που το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (e^{x-1} - 1)(\ln x + x - 1)$, $x > 0$.

Δ1. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Δ4. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $(e^{x-1} - 1)(\ln x + x - 1) = f(\pi)$.

Μονάδες 6

Δ5. Να λύσετε στο $(0, +\infty)$ την εξίσωση $f(x) = ex - e^x$.

Μονάδες 6

Ευχόμαστε επιτυχία!

Askisopolis